2.25) a) Plano xy $= S_1 =$ ~~[illegible]~~ $gen\{[1\,0\,0]^T, [0\,1\,0]^T\}$

$S_2 = gen\{[1,1,1]^T\}$

Junto ambos gen y me queda una base ya que son L.I:

$B = \{[1\,0\,0]^T, [0\,1\,0]^T, [1\,1\,1]^T\}$

Se que si proyecto sobre S1, los vectores $\in S_1$ quedan fijos y los $v \in S_2$ van al 0 ya que están en el núcleo.

Entonces defino la proyección:

$$\Pi_{S_1 S_2}([1,0,0]^T) = [1\;0\;0]^T$$

$$\Pi_{S_1 S_2}([0,1,0]^T) = [0\;1\;0]^T$$

$$\Pi_{S_1 S_2}([1\,1\,1]^T) = [0\;0\;0]^T$$

Busco la expresión general:

Un $v \in \mathbb{R}^3$ puede expresarse como:

$$v = \alpha_1 \cdot [1,0,0]^T + \alpha_2 \cdot [0,1,0]^T + \alpha_3 \cdot [1,1,1]^T \quad \Delta$$

Si aplico $\Pi_{S_1 S_2}$ en ambos lados y uso prop. de las TL:

$$\Pi_{S_1 S_2}(v) = \alpha_1 \cdot \Pi_{S_1 S_2}([1\,0\,0]^T) + \alpha_2 \cdot \Pi_{S_1 S_2}([0\,1\,0]^T) + \alpha_3 \cdot \Pi_{S_1 S_2}([1\,1\,1]^T)$$

$$\rightarrow \Pi_{S_1 S_2}(v) = \alpha_1 \cdot [1\;0\;0]^T + \alpha_2 \cdot [0\;1\;0]^T + \alpha_3 [0\;0\;0]^T \quad \circledast$$

Busco $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con Δ

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x_1 \rightarrow \alpha_1 = x_1 - x_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \rightarrow \alpha_2 = x_2 - x_3 \\ \alpha_3 = x_3 \end{cases}$$

Usando esto en (*):

(*) $\rightarrow \Pi_{S_1S_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ que lo puedo escribir como:

$\rightarrow \Pi_{S_1S_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Por lo tanto: $\boxed{[M\Pi_{S_1S_2}]_E^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

b) $S_1 = gen\{[1\ 1\ 1]^T, [1\ 1\ 0]^T\}$ $S_2 = gen\{[0\ 1\ 2]^T\}$

Junto los gen y obtengo una base para armar la TL (son LI):

$B = \{[1\ 1\ 1]^T, [1\ 1\ 0]^T, [0\ 1\ 2]^T\}$

Defino la TL:

$\Pi_{S_1S_2}([1\ 1\ 1]^T) = [1\ 1\ 1]^T$

$\Pi_{S_1S_2}([1\ 1\ 0]^T) = [1\ 1\ 0]^T$

$\Pi_{S_1S_2}([0\ 1\ 2]^T) = [0\ 0\ 0]^T$

Busco la expresión gral.:

Cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ puede expresarse como:

$$v = \alpha_1 . [1 \ 1 \ 1]^T + \alpha_2 . [1 \ 1 \ 0]^T + \alpha_3 . [0 \ 1 \ 2]^T$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \to \alpha_2 = -x_1 - x_3 + 2x_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_2 \to \alpha_3 = -x_1 + x_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = x_3 \to \alpha_1 = x_3 + 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Si aplico $\Pi_{S_1 S_2}$ de ambos lados y uso prop. de las TL:

$$\Pi_{S_1S_2}(v) = \alpha_1 . \Pi_{S_1S_2}([1 \ 1 \ 1]^T) + \alpha_2 . \Pi_{S_1S_2}([1 \ 1 \ 0]^T) + \alpha_3 . \Pi_{S_1S_2}([0 \ 1 \ 2]^T) \to$$

$$\to \Pi_{S_1S_2}(v) = \alpha_1 . [1 \ 1 \ 1]^T + \alpha_2 . [1 \ 1 \ 0]^T + \alpha_3 . [0 \ 0 \ 0]^T \to$$

→ usando los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ calculados:

$$\to \Pi_{S_1S_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = (2x_1 - 2x_2 + x_3) . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 - x_3 + 2x_2) . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \Pi_{S_1S_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde $\boxed{[M_{\Pi_{S_1S_2}}]_E^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$

c) $S_1 = \text{gen}\{1, x\}$, $S_2 = \text{gen}\{1+x+x^2\}$

Junto los gen. y obtengo una base p/armar la TL (son LI)

$B = \{1, x, 1+x+x^2\}$

en donde, como es una simetría, a los vectores de S_1 los deja iguales y a los de S_2 les cambia el signo:

$$\begin{cases} S_{S_1 S_2}(1) = 1 \\ S_{S_1 S_2}(x) = x \\ S_{S_1 S_2}(1+x+x^2) = -1-x-x^2 \end{cases}$$

Un v genérico de $\mathbb{R}_2[x]$ puede expresarse como:

$$\underbrace{P}_{a_0+a_1x+a_2x^2} = \alpha_1 \cdot (1) + \alpha_2 \cdot (x) + \alpha_3 \cdot (1+x+x^2)$$

en donde:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = a_0 \to \alpha_1 = a_0 - a_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = a_1 \to \alpha_2 = a_1 - a_2 \\ \alpha_3 = a_2 \end{cases}$$

Si aplico $S_{S_1 S_2}$ de ambos lados y uso prop. de las TL:

$$S_{S_1 S_2}(P) = \alpha_1 \cdot S_{S_1 S_2}(1) + \alpha_2 \cdot S_{S_1 S_2}(x) + \alpha_3 \cdot S_{S_1 S_2}(1+x+x^2) \to$$

$$\to S_{S_1 S_2}(P) = \alpha_1 \cdot (1) + \alpha_2 \cdot (x) + \alpha_3 \cdot (-1-x-x^2)$$

usando los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ hallados:

$$S_{S_1 S_2}(P) = (a_0 - 2a_2) + (a_1 - 2a_2)x - a_2 x^2$$, calculo el transformado que me faltaba p/armar $[S_{S_1 S_2}]_E^E$

$$S_{S_1 S_2}(x^2) = -2 - 2x - x^2$$

Por lo tanto: $\boxed{[S_{S_1 S_2}]_E^E = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} T(1) & T(x) & T(x^2) \end{array} \end{array}}$

d) $S_1 = gen\{1+x,\ 1+x+x^2\}$, $S_2 = gen\{x+2x^2\}$

Idem anteriores...

$B = \{1+x,\ 1+x+x^2,\ x+2x^2\}$

$S_{S_1S_2}(1+x) = 1+x$

$S_{S_1S_2}(1+x+x^2) = 1+x+x^2$

$S_{S_1S_2}(x+2x^2) = -x-2x^2$

$p = \alpha_1.(1+x) + \alpha_2.(1+x+x^2) + \alpha_3.(x+2x^2)$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = a_0 \rightarrow \alpha_1 = -a_0+2a_1-a_2 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = a_1 \rightarrow \alpha_3 = -a_0+a_1 \\ \alpha_2+2\alpha_3 = a_2 \rightarrow \alpha_2 = a_2+2a_0-2a_1 \end{cases}$$

$S_{S_1S_2}(p) = (-a_0+2a_1-a_2).(1+x) + (2a_0-2a_1+a_2).(1+x+x^2) + (-a_0+a_1)(-x-2x^2)$

$\rightarrow S_{S_1S_2}(p) = (-a_0+2a_1-a_2-a_0x+2a_1x-a_2x) + (2a_0-2a_1+a_2+2a_0x-2a_1x+a_2x + \ldots$

$\ldots + 2a_0x^2-2a_1x^2+a_2x^2) + (a_0x+2a_0x^2-a_1x-2a_1x^2) \rightarrow$

$\rightarrow S_{S_1S_2}(p) = (a_0) + (2a_0-a_1)x + (2a_0-4a_1+a_2)\ x^2$

Ahora calculo las transf. de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

p/armar $[S_{S_1S_2}]_E^E$:

$$S_{S_1S_2}(1) = 1 + 2x + 2x^2$$

$$S_{S_1S_2}(x) = -x - 4x^2$$

$$S_{S_1S_2}(x^2) = x^2$$

Por lo tanto:

$$[S_{S_1S_2}]_E^E = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} T(1) & T(x) & T(x^2) \end{array} \end{array}$$